5. REGIMUL PERIODIC NESINUSOIDAL (DEFORMANT)

5.1. Introducere

Un circuit functioneaza in regim periodic daca toate tensiunile si toti curentii sunt functii periodice de aceeasi perioada. Daca cel putin o tensiune sau un curent nu este sinusoidal, se spune ca regimul este nesinusoidal sau deformant. Acest regim apare ca un regim permanent (comportarea asimptotica cand $t \to \infty$) intr-un circuit dinamic cu comportare obisnuita in care toate excitatiile sunt periodice de aceeasi perioada si sunt conectate la t= 0. Regimul periodic nesinusoidal este foarte important in circuitele lectronice si in electroenergetica.

5.2. Dezvoltarea in serie Fourier a functiilor periodice. Proprietati

O functie y(t) este periodica de perioada T daca y(t)=y(t+nT), $n \in N$.

O functie y(t), de perioada T, care indeplineste conditiile Dirichlet:

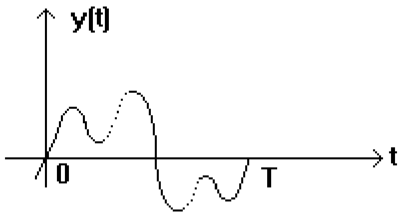
(1) este absolut integrabila pe î0,Tş ($\int_0^T |y(t)| dt \langle \infty$)

(2) are pe î0,Tş un numar finit de puncte de discontinuitatede prima speta (finite)

(3) intervalul î0,Tş se poate descompune intr-un numar finit de intervale pe care y(t) este monotona

admite o dezvoltare in serie Fourier (trigonometrica) de forma:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$



unde: $\frac{A_0}{2}$ este componenta continua;

$A_1 \cos\omega t$ si $B_1 \sin\omega t$ sunt componentele fundamentale in cosinus si sinus;

$A_n \cos n\omega t$ si $B_n \sin n\omega t$ sunt armonicele de ordinul n in cos sau sin.

Marimile $\frac{A_0}{2}$, A_n si B_n se numesc coeficienti Fourier si sunt date de:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt\,,\ A_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos n\omega t dt \ \text{ si } B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin n\omega t dt \qquad \text{pentru } n=1,2,3,...$$

In studiul circuitelor electrice in regim periodic nesinusoidal se utilizeaza si urmatoarea forma a dezvoltarii in serie Fourier

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_n \sin(n\omega t + \psi_n) \text{ cu } Y_0 = \frac{A_0}{2},\ Y_n = \sqrt{\left[\frac{A_n^2 + B_n^2}{2}\right]},\ \psi_n = \operatorname{arctg}\frac{B_n}{A_n}$$

Proprietati ale functiilor periodice

i) Daca functia este simetrica in raport cu punctul situat la mijlocul perioadei (y(t)=y(t+T/2)) , atunci dezvoltarea in serie Fourier contine numai armonice pare si functia se numeste "functie para". Intr-adevar, armonicele impare in sinus si cosinus sunt antisimetrice in raport cu mijlocul perioadei deoarece

$$\sin\left[(2k+1)\omega(t+\frac{T}{2})+\varphi\right] = \sin\left[(2k+1)\omega t+\varphi+(2k+1)\pi\right] = -\sin\left[(2k+1)\omega t+\varphi\right] \quad \text{si}$$

$$\cos\left[(2k+1)\omega(t+\frac{T}{2})+\varphi\right] = \cos\left[(2k+1)\omega t+\varphi+(2k+1)\pi\right] = -\cos\left[(2k+1)\omega t+\varphi\right].$$

Armonicele pare in sinus si cosinus sunt simetrice in raport cu mijlocul perioadei deoarece in loc de (2k+1) π apare 2kπ si cos 2kπ=1. Rezulta

$$A_{2k+1} = B_{2k+1} = 0 \quad \text{si} \quad Y_{2k+1} = 0 \quad (k = 1,2,...) \quad \text{si}$$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \cos 2k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \sin 2k\omega t = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_{2k} \sin(2k\omega t + \Psi_{2k})$$

ii) daca functia este antisimetrica in raport cu punctul situat la mijlocul perioadei (y(t)= -y(t+T/2)) atunci dezvoltarea are numai armonice de ordin impar si functia se numeste "functie impara”.

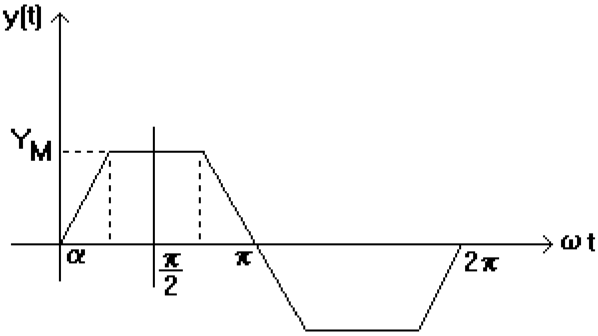
$$A_0 = Y_0 = 0,\quad A_{2k} = B_{2k} = Y_{2k} = 0 :,\quad k = 1,2 \ldots$$

$$y(t) = \sum_{0}^{\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1)\omega t + \sum_{0}^{\infty} B_{2k+1} \sin(2k+1)\omega t = \sum_{0}^{\infty} \sqrt{2} Y_{2k+1} \sin\left[(2k+1)\omega t + \Psi_{2k+1}\right]$$

*iii)*daca functia y(t) verifica relatia: y(t) = y(T-t) atunci functia contine numai armonice in cosinus. (B_n=0 pentru n=1,2,...): $\sin[k\omega(T-t)] = \sin k\frac{2\pi}{T}T\cos k\omega t - \cos k\frac{2\pi}{T}T\sin k\omega t = -\sin k\omega t$

iv) daca functia y(t) verifica relatia:y(t) = -y(T-t) atunci ea contine numai armonice in sinus (A_n=0 pentru n=1,2,3,...) : $\cos[k\omega(T-t)] = \cos k\omega t$

Aplicatie: Dezvoltarea in serie Fourier a unei functii trapezoidale.



$$y(t) = \begin{cases} \frac{Y_M}{\alpha}\omega t & \text{pt} \quad 0 \le t \le \frac{\alpha}{\omega} \\ Y_M & \text{pt} \quad \frac{\alpha}{\omega} \le t \le \frac{\pi}{2\omega} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Se observa ca y(t) este antisimetrica in raport cu T/2=π si $y(t) = -y(T-t)$ deci exista numai armonicele pare in sinus.

Daca notam ωt = x, atunci

$$B_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\alpha} \frac{Y_M}{\alpha} x \sin[(2n+1)x]dx + \frac{4}{\pi}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} Y_M \sin[(2n+1)x]dx \;=$$

$$\frac{4}{\pi}\frac{Y_M}{\alpha(2n+1)}\left[-\alpha\cos(2n+1)\alpha + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\alpha\right] +$$

$$+\frac{4}{\pi}\frac{Y_M}{2n+1}\cos(2n+1)\alpha = \frac{4}{\pi}\frac{Y_M}{\alpha}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)\alpha.$$

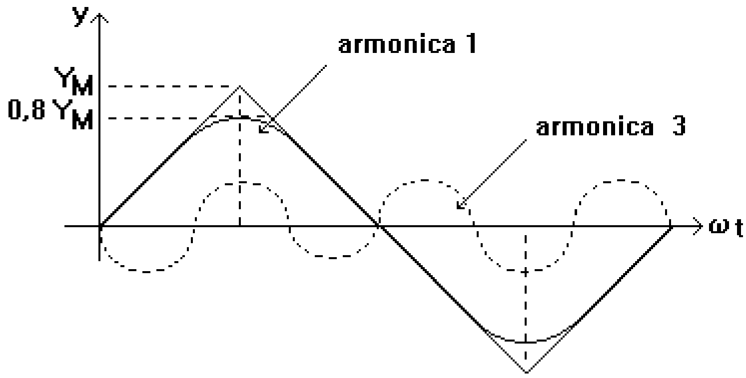
Deci

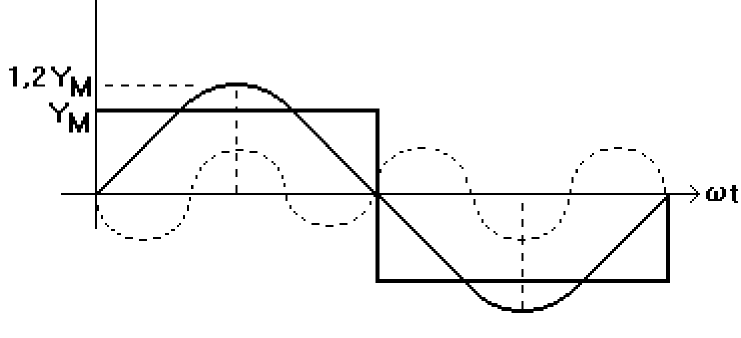
$$y(t) = \sum_0^{\infty} B_{2n+1}\sin(2n+1)\omega t = \frac{4Y_M}{\pi\alpha}[\sin\alpha\sin\omega t + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5\omega t +$$

$$...+\frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)\alpha\sin(2n+1)\omega t + ...]$$

Daca $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obtine unda triunghiulara cu urmatoarea dezvoltare in serie Fourier:

$$y(t) = \frac{8Y_M}{\pi^2}(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)\omega t + ...)$$



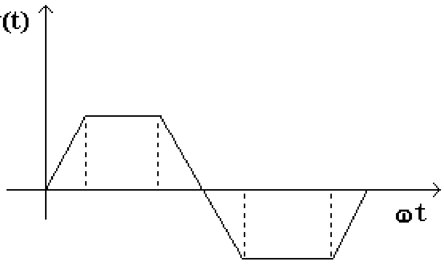


Daca α = 0 se obtine unda dreptunghiulara cu urmatoarea dezvoltare in serie Fourier:

$$y(t)=\frac{4Y_M}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+...+\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\omega t+...)$$

Daca $\alpha = \pi/3$ se obtine o unda "aproape sinusoidala" (deoarece armonicele superioare au amplitudinile foarte mici in raport cu armonica fundamentala).

$$\mathrm{y(t)}=\frac{12\mathrm{Y_M}}{\pi^2}(\sin\frac{\pi}{3}\sin\omega\mathrm{t}+\frac{\sin\pi}{3^2}\sin 3\omega\mathrm{t}+\frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{5^2}\sin 5\omega\mathrm{t}\ldots)=1{,}05\mathrm{Y_M}(\sin\omega\mathrm{t}+\frac{1}{25}\sin 5\omega\mathrm{t}\ldots)$$



v) valoarea medie a produsului a doua armonice

Fie

$$u(t)=U_0+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)=U_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}U_n\sin(n\omega t+\alpha_n)$$
$$i(t)=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}i_n(t)=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}I_n\sin(n\omega t+\beta_n)$$

Valoarea medie pe o perioada a produsului a doua armonice este: $\overline{u_m i_n}=\frac{1}{T}\int_0^T u_m i_n dt$. Rezulta:

$$\overline{u_m i_n}=\frac{1}{T}\int_0^T u_m i_n dt=\frac{2}{T}\int_0^T U_m I_n\sin(m\omega\, t+\alpha_m)\sin(n\,\omega\, t+\beta_n)dt=$$

$$=\frac{U_m I_n}{T}\int_0^T\left[\cos\left[(m-n)\,\omega\, t+\alpha_m-\beta_n\right]-\cos\left[(m+n)\,\omega\, t+\alpha_m+\beta_n\right]\right]dt$$

Deci: $\overline{u_n i_n}=U_n I_n\cos(\alpha_n-\beta_n)$ pentru m = n si $\overline{u_m i_n}=0$ pentru $m\neq n$

vi) valoarea efectiva a unei marimi periodice este $\mathrm{Y}=\sqrt{\left[\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt\right]}$. Rezulta:

$$\mathrm{Y}^2=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\mathrm{Y}_0+\sum_{n=1}^{\infty}y_n(t)\right]\left[\mathrm{Y}_0+\sum_{n=1}^{\infty}y_n(t)\right]dt=$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\ \mathrm{Y}_0^2+2\mathrm{Y}_0\sum_{n=1}^{\infty}y_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}y_n(t)y_k(t)\ \right]dt$$

Conform proprietatii anterioare suma dubla are termeni nenuli numai pentru m = n si:

$$Y^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T Y_0^2 dt}_{Y_0^2} + \frac{Y_0}{T} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^T y_n(t)dt}_{=0} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^T y_n(t) y_n(t) dt.}_{=\sum_1^{\infty} Y_n^2}$$

si deci valoarea efectiva are expresia: $Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2 + ...}$

unde $Y_d = \sqrt{(Y_2^2 + Y_3^2 + ... + Y_n^2)}$ este reziduul deformant

Se defineste coeficientul de distorsiune: $K_d = \dfrac{Y_d}{\sqrt{(Y - Y_0^2)}}$ unde $0 \le K_d \le 1$

S-a convenit ca pentru $K_d \langle 5\%$ tensiunile si curentii sa se considere marimi sinusoidale.

5.3. Puteri in regim periodic nesinusoidal

Puterea instantanee p(t) absorbita de un dipol care functioneaza in regim periodic nesinusoidal este: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

unde

$$u(t) = U_0 + \sum_1^{\infty} u_n(t) = U_0 + \sum_1^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_1^{\infty} i_n(t) = I_0 + \sum_1^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \beta_n)$$

Puterea activa P este media pe o perioada a puterii instantanee p(t): Deci

$P = \overline{p} = \overline{ui} = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n$ cu unitatea de masura W(watt), unde

$\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ este defazajul dintre armonica n de tensiune si armonica n de curent.

Demonstratia acestei relatii se bazeaza pe relatia $\overline{u_n i_n} = U_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n)$.

Deci in regim periodic nesinusoidal puterea activa este egala cu o suma ai carei termeni sunt puterea de curent continuu $U_0 I_0$ si puterile active corespunzatoare fiecarei armonice.

Puterea reactiva Q se defineste ca suma puterilor reactive corespunzatoare tuturor armonicelor

$Q = \sum_1^{\infty} U_n I_n \sin\varphi_n$ cu unitatea de masura VAR (volt - amper reactiv).

Puterea aparenta S este egala cu produsul dintre valorile efective ale tensiunii si curentului

$S = UI = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + ...)} \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + ...)}$ cu unitatea de masura VA (volt-amper). Se poate observa ca in regim nesinusoidal $S^2 \neq P^2 + Q^2$

Puterea deformanta D este definita astfel:

$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$ cu unitatea de masura VAD (volt - amper deformant).

Daca se inlocuiesc S, P si Q cu expresiile lor in functie de armonicele de tensiune si de curent rezulta:

$$D^2 = \sum_{m=0}^{\infty} U_m{}^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_n{}^2 - (\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n)^2 - (\sum_{m=1}^{\infty} U_m I_m \sin\varphi_m)^2 =$$
$$= \sum_{\substack{m,n=0 \\ m\neq n}}^{\infty} [U_m{}^2 I_n{}^2 + U_n{}^2 I_m{}^2 - 2U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)]$$

De exemplu, daca u(t) si i(t) au componenta fundamentala si armonicele 3 si 5

$$D^2 = U_1{}^2 I_3{}^2 + U_1{}^2 I_5{}^2 + U_3{}^2 I_1{}^2 + U_3{}^2 I_5{}^2 + U_5{}^2 I_3{}^2 + U_5{}^2 I_1{}^2 - 2U_1U_3I_1I_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) -$$
$$- 2U_1U_5I_1I_5 \cos(\varphi_1 - \varphi_5) - 2U_3U_5I_3I_5 \cos(\varphi_3 - \varphi_5)$$

Se observa, din expresia de mai sus, ca puterea deformanta se anuleaza daca sunt indeplinite conditiile: $\frac{U_0}{I_0} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \cdots = \frac{U_n}{I_n} = constant$ si $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \text{constant}$. Singurul element de circuit care satisface aceste conditii este rezistorul liniar ($\varphi = 0$ si $\frac{U_n}{I_n} = R$).

Factorul de putere in regim nesinusoidal se defineste astfel: $K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$

Se observa imediat ca anularea puterii reactive nu aduce factorul de putere la valoarea 1 ca in regim sinusoidal; este posibil ca anuland pe Q (deci introducand condensatoare in circuit) sa creasca D (puterea deformanta). In regim nesinusoidal. *puterea complementara* $Q_c = \sqrt{Q^2 + D^2}$ este cea care trebuie compensata (anulata).

Conservarea puterilor

Conform teoremei lui Tellegen (cap.1), intr-un circuit neliniar puterile instantanee se conserva adica $\sum_{\text{toate laturile}} p_k(t) = 0$ sau $\sum_{\text{toate sursele}} p_{kd}(t) = \sum_{\text{toti consumatorii}} p_{ka}(t)$ unde puterile cu indicele d sunt debitate iar puterile cu indicele a sunt absorbite. Considerand media pe o perioada a ultimei relatii rezulta *conservarea puterilor active* adica $\sum_{\text{toate sursele}} P_{kd} = \sum_{\text{toti consumatorii}} P_{ka}$

Intr-un circuit neliniar se conserva numai puterile instantanee si puterile active. Se observa ca are loc numai o conservare globala, nu si pe componente armonice. De exemplu un redresor consuma putere activa pe fundamentala si debiteaza putere activa in curent continuu, pe fundamentala si pe armonicele superioare.

Daca circuitul este liniar, atunci solutia se poate obtine prin superpozitia solutiilor de curent continuu, armonica fundamentala si armonicele superioare (vezi paragraful 4.3.4). Asa cum s-a aratat in capitolele 2 si 4 aceasta inseamna ca exista o conservare pe componente armonice adica *puterea in curent continuu si puterile active si reactive pentru fiecare armonica se conserva:*

$$\sum_{toate\,sursele} U_0 I_0 = \sum_{toti\,consumatorii} U_0 I_0$$

$$\sum_{toate\,sursele} U_k I_k \cos\varphi_k = \sum_{toti\,consumatorii} U_k I_k \cos\varphi_k \; (pentru \;\; armonica \;\; k; \quad k = 1,2,...)$$

$$\sum_{toate\,sursele} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{totii\,consumatorii} U_k I_k \sin\varphi_k \; (pentru \;\; armonica \;\; k; \quad k = 1,2,...)$$

Puterea aparenta si puterea deformanta nu se conserva. Din conservarea pe componente a puterii active si puterii reactive rezulta conservarea pe componente a puterii complexe. Relatiile de conservare a puterilor pot fi utilizate la verificarea corectitudinii rezultatelor analizei circuitului.

5.4. Analiza circuitelor in regim permanent nesinusoidal

5.4.1. Introducere

Determinarea solutiei de regim permanent intr-un circuit cu excitatii periodice de aceeasi perioada se poate face numeric, integrand ecuatiile circuitului pana la disparitia componentelor tranzitorii ale raspunsurilor. Metodele utilizate in acest scop au fost prezentate in capitolul 3. Daca circuitul are o solutie periodica unica, aceasta se obtine plecand de la orice conditii initiale $u_{Ck}(o)$ si $i_{Lk}(0)$. Prin integrarea ecuatiilor circuitului se poate determina solutia de regim permanent a oricarui circuit neliniar.

Daca circuitul este liniar se poate utiliza teorema superpozitiei (asa cum se va arata in paragraful care urmeaza) calculand separat solutiile pentru componenta de curent continuu, armonica fundamentala si fiecare armonica superioara. Acest tip de analiza se numeste *analiza in domeniul frecventei* spre deosebire de integrarea ecuatiilor circuitului (vezi capitolul 3) care face obiectul *analizei in domeniul* timpului. Desi pentru functiile periodice utilizate in tehnica amplitudinile armonicelor de ordin n mai mare decat un anumit prag n_0 devin neglijabile, neglijarea acestor armonice poate avea o influenta vizibila asupra formei semnalelor din circuit. Tinand seama de acest efect, precum si de faptul ca analiza repetata a aceluiasi circuit la mai multe pulsatii (ω=0, ω, 2ω, 3ω, ...) necesita un efort de calcul considerabil, in cele mai multe cazuri se prefera analiza in domeniul timpului (integrarea ecuatiilor circuitului pana la disparitia componentelor tranzitorii) pentru determinarea raspunsului periodic al circuitelor liniare.

Metoda analizei in domeniul frecventei (analiza pe componente armonice) este utila atunci cand numarul acestor componente este relativ mic. Pentru astfel de circuite, chiar daca sunt neliniare, se face analiza pe componente armonice numai pentru subcircuitele liniare. Aceasta tehnica se combina cu un procedeu de corectare iterativa a raspunsurilor subcircuitelor liniare in functie de raspunsurile subcircuitelor neliniare (calculate prin integrare in domeniul timpului).

Analiza in domeniul frecventei este utila, in afara cazurilor enumerate pana acum, si din punct de vedere didactic deoarece evidentiaza clar unele proprietati ale circuitelor in regim permanent nesinusoidal. In continuare se prezinta analiza circuitelor liniare si neliniare in domeniul frecventei.

5.4.2. Circuite liniare

Fie un circuit liniar cu excitatiile nesinusoidale de tipul:

$$u(t) = U_0 + \sum_1^{\infty} U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

Analiza in regim permanent a acestui circuit se face pe fiecare armonica in parte utilizand calculul in complex. Armonica de ordinul n a tensiunii determina aparitia armonicei de ordinul n a curentului. Impedanta complexa a fiecarui element ideal de circuit corespunzatoare armonicei n este

– rezistor $\underline{Z}_R^{(n)} = R$

– bobina $\underline{Z}_L^{(n)} = jn\omega L$

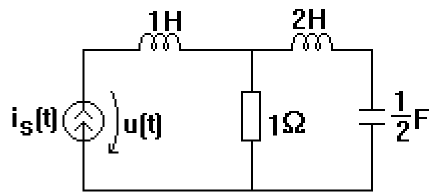
– condensator $\underline{Z}_C^{(n)} = -j\frac{1}{n\omega C}$

Deoarece pentru bobina ideala $I_n = \frac{U_n}{n\omega L}$ se observa usor ca coeficientul de distorsiune k_{di} pentru curent este mai mic decat coeficientul de distorsiune k_{du} al tensiunii aplicate. La condensatorul ideal, deoarece $I_n \equiv U_n n\omega C$, $k_{di} > k_{du}$.

In baza teoremei superpozitiei curentul din fiecare latura este egal cu suma tuturor curentilor de armonica n calculati: $i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \beta_n)$

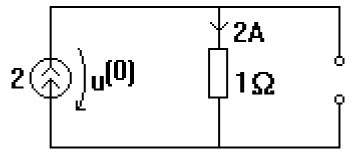
Regimul componentelor continue de curent si tensiune se determina pe o retea separata a carei structura difera de cea pe care se studiaza regimul armonicelor de ordinul 1,2,.... Deoarece in curent continuu u_C=ct rezulta $i_C = C du_C/dt = 0$ si condensatorul se inlocuieste cu un rezistor cu R = ∞. Similar, deoarece u_L=ct rezulta $u_L = L di_L/dt = 0$ si bobina se inlocuieste cu un rezistor de rezistenta R=0.

Exemplu Sa se determine valoarea efectiva a tensiunii u(t) din circuitul din figura.



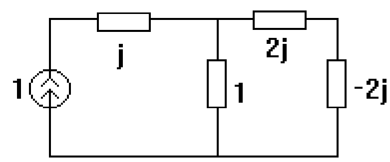
unde $i_S(t) = 2 + \sqrt{2}\sin t + 2\sqrt{2}\cos 2t$

Circuitul echivalent pentru componenta de curent continuu este

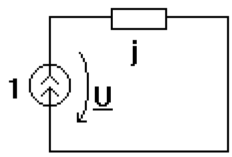


Evident componenta de curent continuu a lui u(t) este $u_0 = 2 \cdot 1 = 2V$.

Circuitul echivalent in complex pentru armonica intai (ω=1) este

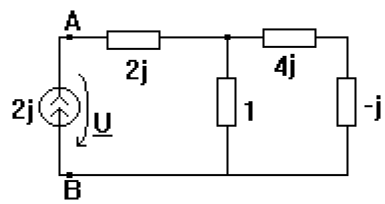


sau, datorita rezonantei serie pentru ω=1.



Rezulta $\underline{U} = 1 \cdot j$ si componenta de pulsatie ω=1 a lui u(t) este $u_1(t) = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\cos t$.

Circuitul echivalent in complex pentru armonica a doua (ω=2) este:



Pentru a calcula pe $\underline{U}$ se determina impedanta echivalenta $\underline{Z}_{AB}$ intre bornele A si B.

$$\underline{Z}_{AB} = 2j + \frac{1 \cdot 3j}{1+3j} = \frac{-6+5j}{1+3j} = \frac{(-6+5j)(1-3j)}{10} = \frac{9+23j}{10}$$

Rezulta $\underline{U} = \underline{Z}_{AB} \cdot 2j = \frac{(9+23j)2j}{10} = -\frac{46+18j}{10}$

si componenta de pulsatie 2ω a lui u(t) este: $u_2(t) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2116}}{10}\sin(2t + \pi - arctg\frac{18}{46})$.

Valoarea efectiva a lui u(t) este $U = \sqrt{2^2 + 1^2 + \frac{2116}{100}} = 5{,}115V$.

Intr-un circuit in regim permanent nesinusoidal rezonanta poate sa apara pe fundamentala sau pe o armonica superioara.

5.4.3. Circuite neliniare

5.4.3.1. Transformarea Fourier disccretă

Un semnal periodic de perioadă T poate fi dezvoltat în seria Fourier complexă

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t}$$

unde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ şI $C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega t}dt$

Se observă că $C_{-k} = C_k^*$

Contribuţia termenului $C_k e^{jk\omega t}$ şi $C_k e^{-jk\omega t}$ la x(t), considerând $C_k = A_k + jB_k$, este :

$(A_k + jB_k)e^{jk\omega t} + (A_k - jB_k)e^{-jk\omega t} = 2A_k \cos k\omega t - 2B_k \sin k\omega t$

De obicei se consideră un număr finit de componente spectrale C_k :

$$x(t) = \sum_{k=-k}^{k} C_k e^{jk\omega t}$$

Componentele spectrale se pot calcula considerând N eşantioane ale semnalului $x(t)(x(0), x(\Delta t),..., x((N-1)\Delta t))$ unde $\Delta t = \frac{T}{N}$. Rezultă

$$C_k = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-jk\omega n\Delta t}\Delta t = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}.$$

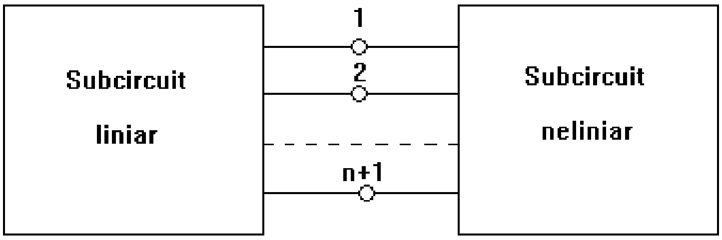
$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$, $k = 0,1,..., N-1$ formează transformata Fourier discretă a mulţimii de eşantioane $x(0), x(\Delta t),..., x((n-1)\Delta t)$.

Trecerea inversă de la valorile X_k la mulţimea eşantioanelor este transformata Fourier discretă inversă :

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (n = 0,1,..., N-1)$$

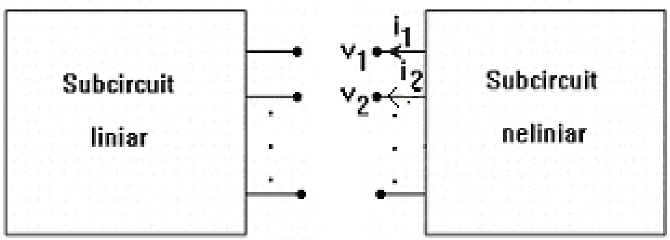
Conform teoremei eşantionării $K < \frac{N}{2}$, deci numărul componentelor spectrale (2K+1) nenule este limitat de numărul eşantioanelor (N).

Fie un circuit în care elementele neliniare sunt numai rezistoare controlate in tensiune şi condensatoare controlate în tensiune. Pentru un astfel de circuit se pot scrie ecuatiile metodei nodale avand ca necunoscute numai potentialele nodurilor (vezi capitolul 3). Se presupune că fiecare potential are câte $2N_h + 1$ componente armonice ale căror amplitudini complexe X_k trebuie calculate. Circuitul poate fi descompus într-un subcircuit liniar care conţine şi sursele independente şi un subcircuit neliniar. Cele două subcircuite sunt conectate prin n+1 noduri.



Presupunem că subcircuitul liniar are o reprezentare controlată în tensiune la porţile (1, n+1), (2, n+1)…(n, n+1) descrisă de I=YV+J unde I şi V sunt vectorii curenţilor şi tensiunilor porţilor şi J este vectorul surselor independente de curent echivalente. Dimensiunea vectorilor este n şi dimensiunile matricei Y sunt $n \times n$. Pentru fiecare componentă armonică k, curenţii care intră în primele n borne ale multipolului liniar sunt $I_k = Y_k V_k + J_k$ unde J_k şi V_k sunt mărimi complexe şi Y_k este matricea admitanţelor complexe ale porţilor calculată pentru componenta armonică k.

Fie *x(t)* vectorul potentialelor nodurilor subcircuitului neliniar. Aceste potentiale sunt reprezentate de vectorul X care are $N_x(2N_h + 1)$ componente (amplitudini complexe), unde N_x+1



este numarul nodurilor din subcircuitul neliniar. Se pleacă de la o estimare initiala a lui *X* ceeace permite calculul lui *x(t)* in anumite momente de timp kh (k=1,...,2N_h) folosind transformarea Fourier inversa. Cunoscand ecuatiile constitutive ale elementelor neliniare (i=i(u) pentru rezistoare si q=q(u) pentru condensatoare) se pot calcula valorile curentilor in aceleasi momente de timp. Cu transformarea Fourier discreta se determina amplitudinile complexe ale curentilor prin rezistoarele neliniare si ale sarcinilor condensatoarelor neliniare. Amplitudinile complexe ale curentilor prin condensatoarele neliniare se determina din i=dq/dt derivand in raport cu timpul,termen cu termen, seria Fourier a fiecarei sarcini. Cunoscand amplitudinile complexe ale tuturor curentilor din subcircuitul neliniar se pot determina, utilizând teorema I a lui Kirchhoff, amplitudinile complexe I_k . Se considera că amplitudinile complexe I_k şi V_k depind de *X*.

În regim periodic curenţii care intră în bornele subcircuitului liniar trebuie să fie egali cu cei care ies din bornele corespunzătoare ale subcircuitului neliniar. Atât datorită erorilor în estimarea lui X, cât şi faptului că se consideră un număr finit de componente armonice, există o eroare cu care este satisfăcută egalitatea acestor curenţi. Pentru componenta armonică k aceasta eroare este:

$$E_k(X) = Y_k V_k(X) + J_k + I_k(X)$$

Se urmăreşte minimizarea acestei erori până la o limită impusă. Se utilizează metoda Newton-Raphson pentru a rezolva ecuaţia E(X)=0.

Rezultă $X^{(n+1)} = X^{(n)} - J^{(-1)}(X^{(n)})E(X^{(n)})$ unde J este Jacobianul ecuaţiei E(x)=0

Algoritmul acestei metode cunoscută şi sub numele de metoda balanţei armonice,este următorul:

1. Se iniţializează X
2. Se analizează subcircuitul neliniar în domeniul timpului şi rezultă $V_k(X), I_k(X)$.
3. Cunoscând Y_k pentru fiecare componentă armonică se calculează $E_k(X)$.
4. Dacă $\|E\| \le \varepsilon$ se obţine soluţia, dacă $\|E\| > \varepsilon$ se calculează noul X cu metoda Newton-Raphson şi se reia calculul începând cu pasul 2.

Observaţii

i) Calculele devin foarte laborioase chiar pentru circuite simple; de exemplu dacă se consideră $N_h = 4$ şi avem $N_x = 10$ variabilele de stare în circuitul neliniar atunci dimensiunea lui E este 10(2x4+1)=90 componente în J are 90x90 componente.

ii) Convergenţa iteraţiilor Newton-Raphson nu este garantată. Pentru a înlătura această dificultate se foloseşte subrelaxarea $X^{(n+1)} = X^{(n)} - \alpha J^{-1}(X^{(n)})E(X^{(n)})$ unde $\alpha < 1$.

iii) În general excitaţiile sunt sinusoidale. În practică putem avea excitaţii de o singură pulsaţie, două sau trei (un ton, două tonuri, trei tonuri). În cazul unui ton cu pulsaţia ω_0 şi $N_h = 5$ componentele armonice sunt $-4\omega_0, -3\omega_0, -2\omega_0, -\omega_0, 0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0$. Dacă avem două tonuri ω_1 şi ω_2 componentele armonice au pulsaţiile $p\omega_1 + q\omega_2$ unde $|p| + |q| \le M$; de exemplu pentru M=2 componentele armonice sunt:

$$-2\omega_1 - \omega_1, 0, \omega_1, 2\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2, -\omega_1 - \omega_2, -\omega_1 + \omega_2$$

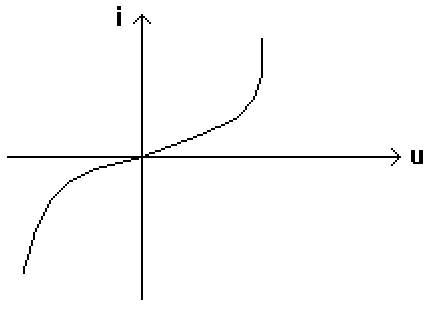
O importantţă practică deosebită o au componentele cu pulsatii rezultate prin diferenţă (produsele de intermodulaţie). De exemplu în orice receptor de radio sau televiziune aparitia semnalului cu pulsatie diferenţă intre pulsaţia semnalului captat de antenă şi pulsaţia oscilatorului local permite recepţionarea unui singur post.

5.5. Regimul deformant in sistemul electroenergetic

5.5.1. Functionarea in regim deformant

Asa cum s-a aratat in paragraful 4.1 sistemul electroenergetic este format din generatoare cu tensiuni electromotoare sinusoidale de aceeasi pulsatie ω si receptoare. Daca toate elementele de circuit sunt liniare, in regim permanent toti curentii si toate tensiunile sunt functii sinusoidale de pulsatie ω. Daca in acest sistem cel putin un element de circuit este neliniar, regimul permanent al circuitului, daca exista, este un regim deformant. Iata cateva exemple:

Rezistorul neliniar alimentat cu tensiune sinusoidala Fie un rezistor cu caracteristica $i = au + bu^3$.

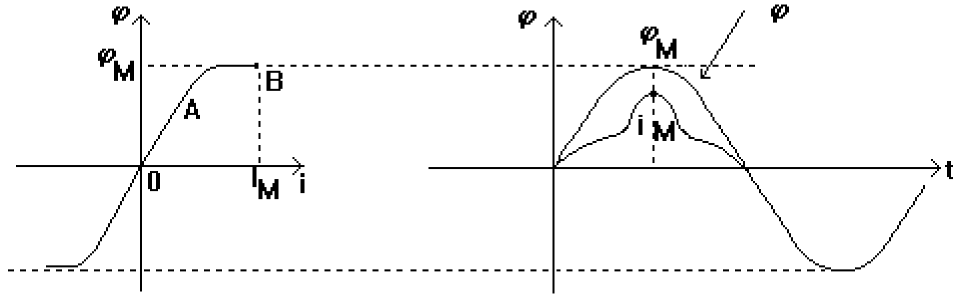


Daca $u = \sqrt{2}U\sin\omega t$ rezulta $i = \sqrt{2}aU\sin\omega t + 2\sqrt{2}bU^3\sin^3\omega t$ si tinand seama ca $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ avem $i = \sqrt{2}(aU + \frac{3}{2}bU^3)\sin\omega t - \frac{\sqrt{2}}{2}bU^3\sin 3\omega t.$

Se observa aparitia armonicei a treia de curent care provine din termenul bu^3 din ecuatia constitutiva a rezistorului neliniar.

Bobina cu miez de fier alimentata cu tensiune sinusoidala Bobina cu miez de fier este un element neliniar de circuit caracterizat de ecuatia constitutiva neliniara $\varphi = \varphi(i)$ corespunzatoare curbei de magnetizare a fierului. Ecuatia de functionare a bobinei este $u = N\frac{d\varphi}{dt}$ unde N este numarul de spire si φ este fluxul magnetic fascicular (printr-o spira). Daca $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ rezulta $\varphi = \frac{U\sqrt{2}}{N\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ deci φ este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ in urma tensiunii.

Pe portiunea liniara OA a curbei de magnetizare curentul i va avea o variatie sinusoidala fiind defazat cu π/2 in urma tensiunii. Pe portiunea neliniara AB a caracteristicei de magnetizare se poate determina forma undei de curent pe cale grafica.



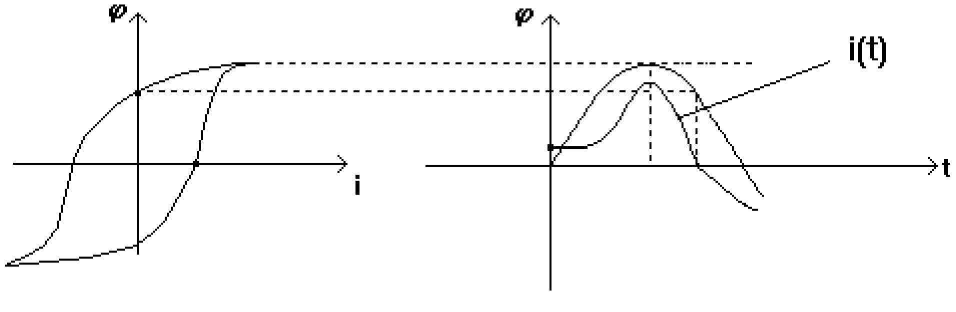
Se construieste curba i(t) punct cu punct utilizand caracteristica φ(i) . Curba i(t) este bisimetrica in sinus, deci contine numai armonice impare, cu armonica a 3-a in opozitie cu fundamentala.

$$i = I_1\sqrt{2}\sin\omega t - I_3\sqrt{2}\sin 3\omega t + (-1)^{2n+1}\sum_{n=2}^{\infty} I_{2n+1}\sqrt{2}\sin(2n+1)\omega t$$

Curentul este "in faza" cu fluxul (adica are extremele la aceleasi momente de timp si se anuleaza la aceleasi momente de timp).

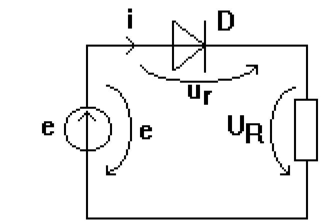
Puterea activa absorbita de bobina este nula: $P = \sum_{1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n = U_1 I_1 \cos\frac{\pi}{2} = 0$

In cazul in care ciclul de histerezis al materialului din care este facut miezul bobinei nu poate fi neglijat, curba i(t) se construieste in acelasi mod. Se obtine o curba i(t) care nu este simetrica si nici "in faza" cu fluxul magnetic dar are maximul in acelasi timp cu φ.

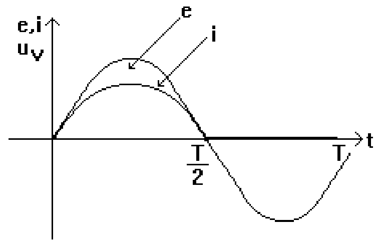


Curentul este defazat inaintea fluxului cu un unghi α numit unghi de avans histerezis si deci defazajul dintre tensiune si curent este (π/2-α). In aceste conditii puterea activa absorbita de bobina nu mai este nula $P=U_1I_1\cos(\pi/2-\alpha) = U_1I_1\cos\alpha \neq 0$ si corespunde pierderilor in fier prin histerezis. Cazul condensatorului neliniar (capacitati neliniare apar la efectul Corona) alimentat cu tensiune sinusoidala este similar cu cel al bobinei neliniare.

Redresorul Functionarea celui mai simplu redresor (redresorul monoalternanta fara filtru) a fost studiata in capitolul 2. Generatorul ideal de tensiune are $e=E\sqrt{2}\sin \omega t$.



Asa cum s-a aratat in capitolul 2, forma de unda a curentului este:



$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{E\sqrt{2}}{R}\sin \omega t, \ pt \ \dfrac{2k\pi}{\omega} \le t < \dfrac{(2k+1)\pi}{\omega} \\ 0 \quad pt \quad \dfrac{(2k+1)\pi}{\omega} \le t < \dfrac{(2k+2)\pi}{\omega} \end{cases}$$

Dezvoltand in serie Fourier rezulta:

$$i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\pi R} + \frac{E\sqrt{2}}{2R}\sin \omega t + \frac{2\sqrt{2}}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}\sin(2n\omega t - \frac{\pi}{2})$$

5.5.2. Efectele regimului deformant si compensarea acestora

Functionarea in regim deformant produce in sistemul electroenergetic efecte defavorabile. Acestea pot fi puse in evidenta pe un exemplu simplu. Fie un receptor liniar inductiv pentru care se considera o schema echivalenta RL serie. Acest receptor functioneaza in regim sinusoidal la o tensiune U_1 si absoarbe un curent I_1, factorul de putere fiind

$$K = \frac{P}{S} = \frac{I_1^2}{U_1 I_1} = \frac{RI_1}{U_1}$$

Daca acelasi receptor este conectat intr-o retea in care apare si o componenta de armonica a treia a tensiunii de alimentare de valoare efectiva U_3 prin el va circula si armonica a treia de curent de valoare efectiva I_3 . Ca urmare, valoarea efectiva a curentului absorbit creste de la I_1 la $\sqrt{I_1^2 + I_3^2}$ ceea ce produce pierderi suplimentare pe linia de alimentare si in rezistenta echivalenta a receptorului.

Factorul de putere in regim deformant este:

$$K' = \frac{P'}{S'} = \frac{R(I_1^2 + I_3^2)}{\sqrt{(U_1^2 + U_3^2)(I_1^2 + I_3^2)}} = \frac{RI_1}{U_1}\sqrt{\frac{1+\frac{I_3^2}{I_1^2}}{1+\frac{U_3^2}{U_1^2}}} = K\sqrt{\frac{1+\frac{I_3^2}{I_1^2}}{1+\frac{U_3^2}{U_1^2}}}$$

Deoarece receptorul este inductiv $\frac{U_3^2}{U_1^2} > \frac{I_3^2}{I_1^2}$

si deci K'<K deci *in regim deformant scade factorul de putere.*

In paragraful 5.3. am aratat ca pentru ca factorul de putere sa tinda catre valoarea 1 trebuie compensata puterea complementara. Acest deziderat este foarte dificil de realizat de oarece, de exemplu, compensarea puterii reactive poate conduce la cresterea puterii deformante. Solutia practica pentru imbunatatirea factorului de putere in retelele energetice in regim deformant este filtrarea armonicelor asociata cu compensarea puterii reactive pe fundamentala.

In regim sinusoidal imbunatatirea factorului de putere se face prin introducerea de elemente reactive (condensatoare).

In regim nesinusoidal

$$K = \frac{P}{S} = \frac{\sum_1^\infty U_n - I_n - \cos\varphi_n}{\sqrt{\left[(\sum_1^\infty U_n^2) - (\sum_1^\infty I_n^2)\right]}} = \frac{\sum_1^\infty P_n}{U_{ef} - I_{ef}}$$

deci este o functie de U_n, I_n, φ_φ.

Vlorile extreme ale lui K pot fi cautate impunand conditiile anulare a derivatelor lui K in raport cu U_n, I_n, φ_n. De exemplu:

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_n} = -\frac{\sum_1^\infty U_n I_n \sin\varphi_n}{\sqrt{\sum_1^\infty U_n^2 \sum_1^\infty I_n^2}} = 0$$

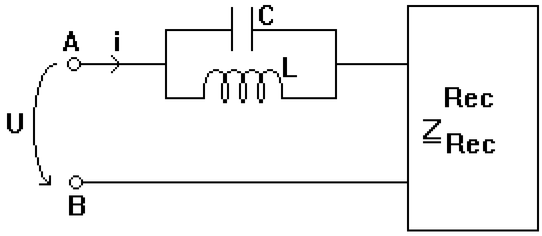
ceea ce conduce la φ_n=0 ceea ce nu este posibil de realizat pentru toate armonicele.

Pentru reducerea anumitor armonice de tensiune sau de curent se folosesc circuite auxiliare formate din bobine si condensatoare legate in serie sau paralel care indeplinesc conditia de rezonanta si care se numesc *filtre de armonice.*

In continuare sunt prezentate doua exemple:

a) Pentru ca intr-un receptor alimentat u o tensiune nesinusoidala curentul sa nu contina armonica de ordinul K trebuie ca impedanta echivalenta, de armonica K a receptorului impreuna cu filtrul sa fie infinita. Aceasta se realizeaza daca L si C indeplinesc conditia de rezonanta pe armonica K.

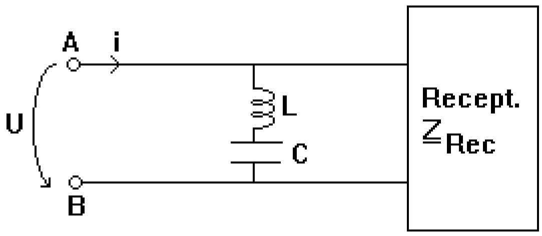
$$K\omega L = \frac{1}{K\omega C}$$



Impedanta filtrului pe armonica K este

$$\underline{Z}_f^{(k)} = \underline{j}(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0 \quad si \quad deci \quad \underline{U}_k = \underline{Z}_{AB}^k \cdot \underline{I}_k = 0.$$

Deci filtrul LC in paralel, legat in serie la bornele receptorului se comporta pa armonica K ca un mers in gol.
b) Pentru ca la bornele unui receptor alimentat cu un curent nesinusoidal sa nu apara armonica K de tensiune trebuie ca impedanta echivalenta a filtrului impreuna cu receptorul sa fie nula. Aceasta se realizeaza daca L si C indeplinesc conditia de rezonanta $K\omega L = \frac{1}{K\omega C}$



Impedanta filtrului este

$$\underline{Z}_f^{(k)} = j(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}) = 0 \; si \; deci \quad \underline{U}_k = \underline{Z}_{AB}^k \cdot \underline{I}_k = 0.$$

Se observa ca acest tip de filtru se comporta pe armonica k ca un scurtcircuit.

In paragraful 6.4. s-a aratat ca un receptor neliniar alimentat cu o tensiune sinusoidala se comporta ca un generator de curent de armonice superioare. In cazul in care se doreste reducerea ariei de raspandire a regimului deformant se leaga in paralel cu receptorul respectiv cate un circuit LC serie rezonant pe fiecare armonica care scurtcircuiteaza practic aceste armonice superioare de curent.